

# 曲率単調な曲線セグメントの対話的制御

Interactive Control of Curve Segments of Monotone Curvature

吉田典正\* 斎藤隆文\*\* 平岩智之\*\*\*  
Norimasa Yoshida Takafumi Saito\*\* Tomoyuki Hiraiwa\*\*\*

\*日本大学 \*\*東京農工大学 \*\*\*日本大学生産工学研究科

\*Nihon University \*\*Tokyo University of Agriculture and Technology \*\*\*Nihon University

\*norimasa@acm.org \*\*txsaito@cc.tuat.ac.jp

## 1 はじめに

工業デザインやスタイルデザインでは、高度に美的な曲線・曲面を用いることが不可欠である。例えば、自動車ボディのキーラインは、自動車の印象に大きな影響を与える重要な曲線である。自動車業界では、高度に美的な外観曲面を Class A 曲面と呼び、エンジンルームなどの通常は見えない部分の曲面を Class B 曲面と呼んでいる。Class A 曲面では、デザイナーの美的な要求に応えるだけでなく、蛍光灯などの曲面への写りこみ映像（反射線）にうねりが生じないことが要求される。Class A 曲面は、理想的には、キーラインをベースにして作成されるべきである。Class A 曲面を定義するようなキーライン曲線は、それ自身が Class A であることが望まれ、一般には曲率変化が単調（減少または増加）であることが要求される。原田らは、自然界や人工物における様々な美しい曲線を調査し、それらの曲線の曲率対数分布図が直線で近似できることを指摘している [17, 6]。美的曲線は [18, 9, 13] は、曲率対数分布図が直線で表わされる曲線であり、曲率単調性よりも強い拘束条件が課された曲線である。

本論文では、Class A 曲面の定義に利用可能な自由曲線（Bézier 曲線）形式の曲線セグメントの対話的な制御手法について述べる。ここでいう対話的制御とは、曲線セグメントを、両端点の位置と接線方向（すなわち 3 点）を指定して描画することを意味する。対象とする曲線は、美的曲線と典型的な Class A Bézier 曲線である。美的曲線は、原田によって提案 [17, 6] された曲線であり、三浦によって一般式が導かれ [18, 9]、吉田と斎藤によって全体像が解明され、両端点の位置とそこでの接線方向（すなわち 3 点）を指定することによって対話的に制御する手法が構築された [15, 13]。美的曲線は、3 点の指定による対話的な制御が可能であるが、積分式で表わされる特殊な形式であるため、自由曲線・曲面表現を採用する既存の CAD システムと互換性を持たない。美的曲線の様々な特長を持つ自由曲線形式の曲線表現が望まれる。Class A Bézier 曲線は、Mineur らの典型的曲線

(typical curves)[8] を一般化した曲線で、Farin によって提案された [4]。典型的な Class A Bézier 曲線は、多項式 Bézier 曲線形式で表されるが、その描画には生成される曲線とは直観的に結び付かないいくつかのパラメータを指定しなければならず、対話的な制御性に欠ける。美的曲線同様の制御性を持たせる手法、およびその性質の解明が望まれる。

本研究の主たる貢献を次に示す。

### (1) 擬似美的曲線の提案

美的曲線セグメントを、3 次の有理 Bézier 曲線セグメントとして近似表現する擬似美的曲線を提案する。擬似美的曲線は、元の美的曲線と両端点での位置、接線方向、曲率が一致する。また、実行結果から、擬似美的曲線においても、曲率対数分布図の直線性がほぼ保たれることを示す。

### (2) 有理 3 次 Bézier 曲線の曲率単調条件式の導出

擬似美的曲線の曲率単調性を確認するため、有理 3 次 Bézier 曲線の曲率単調条件式を導き、パラメータ  $t$  に関する 12 次式になることを示す。この曲率単調条件式を、Bernstein 基底に変換し、de Casteljau のアルゴリズムを再帰的に適用することによって、曲率変化が単調であるかどうかを判定できることを示す。

### (3) 典型的な Class A Bézier 曲線の対話的制御手法の提案

両端点での位置と接線方向（すなわち 3 点）を指定することによって、対話的に典型的な Class A Bézier 曲線を描画する手法を提案する。

### (4) 典型的 Class A Bézier 曲線の性質の解明

(3) で提案した手法で、3 点の配置と典型的な Class A Bézier 曲線が描画可能な領域との関係を明らかにする。また、3 点の配置を固定し、典型的な Class A Bézier 曲線の次数を上げていくと、美的曲線の特殊な場合 ( $\alpha = 1$ ) である対数螺旋に近づくことを示す。

## 2 関連研究

美的曲線に特殊な場合として含まれる対数螺旋およびクロソイド曲線をスプライン近似する研究がすでに行われている。Baumgarten と Farin は、対数螺旋を 3 次の

有理 Bézier 曲線で近似する手法を提案した [1]. Wang らは, 積分式をテイラー展開して近似することによって, クロソイド曲線をスプライン近似する手法を示している [11]. 美的曲線の近似は, 三浦らによって 3 次 (多項式) B-spline による近似が行われている [9]. 美的曲線は円弧を含むことから, 特に曲線セグメントが円弧に近い場合に有理式で近似したほうが誤差が少なく (従って, 少ないセグメント数で) 近似できることが期待される. また, 上記いずれの手法も近似対象の曲線は曲率単調であるが, 近似された曲線の曲率単調性は保証されていない. 本研究では, 美的曲線セグメントを有理 3 次 Bézier 曲線セグメントで近似するとともに, 近似された曲線が曲率単調であることを確認する手法を示す.

Bézier 曲線の曲率単調性の条件は, 特定の次数の多項式または有理曲線に関して求められてきた. Sapidis と Frey は, 2 次の多項式 Bézier に関する必要十分条件を示している [10]. Frey と Field は 2 次有理 Bézier に関する曲率単調性の条件 [5] を示した. Dietz と Piper は, 数値計算によって 3 次の Bézier 曲線が螺旋になるように (従って, 曲率単調になるように) コントロールする手法を提案した [2]. 彼らの手法では, 与えられた位置と接線方向を補間するために事前に作成された表を利用している. Wang らは, 3 次および  $n$  次の多項式 Bézier に関する曲率単調性の十分条件を述べている [12].

Class A Bézier 曲線は, Farin によって提案された曲線であり [4], Mineur らの典型的曲線を一般化したものである (Mineur らの典型的曲線は, 東らの曲線 [7] を一般化している). Class A Bézier 曲線は, 典型的曲線である場合には生成手法が明らかになっているが, 対話的な制御性に欠けるとともに, その性質もあまり明らかになっていない.

### 3 擬似美的曲線

本節では, 美的曲線セグメントを, 両端点での位置, 接線方向, 曲率を一致させ, 有理 3 次 Bézier 曲線によって (近似的に) 表現する [16]. 表現された有理 3 次 Bézier 曲線は, 後の結果に示すように, 曲率対数分布図の直線性がほぼ保たれることから擬似美的曲線 [14] と呼ぶ.

平面有理 3 次 Bézier 曲線は, 4 個の制御点を持つ. しかし, 制御点ベクトルをスカラー倍しても, あるいは, 制御点ベクトルを順にある変数  $s (\neq 0)$  で  $s^0$  倍,  $s^1$  倍,  $s^2$  倍,  $s^3$  倍しても曲線形状は変わらない. よって, 有理 3 次 Bézier 曲線の持つ自由度は 10 である. 従って, 両端点での位置 (自由度 4), 接線方向 (自由度 2), 曲率 (自由度 2) の制約を与えると, 残りの自由度は 2 となる. この 2 つの自由度は, 有理 Bézier 曲線上をサンプリングした点と対応する美的曲線上の点との誤差の二乗和を最小化するように最適化手法によって求める.

制御点ベクトル  $\mathbf{b}_i = [x_i, y_i] (i = 0, \dots, 3)$  から ベク

トル  $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i$  及びスカラー  $v_i$  を次のように定義する.

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j, \quad \mathbf{u}_j = \frac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{v}_j|}, \quad v_j = |\mathbf{v}_j| (j = 0, 1, 2) \quad (1)$$

12 個のパラメータのうち 2 つを適当に決める必要があるため, 制御点の重み  $w_1, w_2$  を

$$w_1 = w_2 = (2.0 * \cos(\theta_D/2.0) + 1.0)/3.0 \quad (2)$$

とする. ここに  $\theta_D$  は, 方向角の変化 ( $\mathbf{v}_0$  と  $\mathbf{v}_2$  のなす角) である. ここに設定した  $w_1, w_2$  の値は, 円弧を表現する場合の 2 次 Bézier 曲線の第 2 の制御点のウェイトを次数上げ [3] したものである. 両端点での位置を一致させることにより,  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_3$  が定まる. また, 両端点での接線方向を一致させることにより,  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_2$  が定まる. ここで,  $v_0, v_2$  が分かっているとすると,  $v_1$  も求まる. 有理 3 次 Bézier 曲線のパラメータ  $t = 0$  および  $t = 1$  における曲率  $\kappa_0, \kappa_1$  は, 次の式によって求めることができる [1, 3].

$$\kappa_0 = \frac{2w_0w_2 \det(v_0, v_1)}{3w_1^2 v_0^3} \quad (3)$$

$$\kappa_1 = \frac{2w_1w_3 \det(v_1, v_2)}{3w_2^2 v_2^3} \quad (4)$$

式 (3), (4) を  $w_0, w_3$  について解くことにより,  $w_0, w_3$  が求まる. 従って, 両端点での位置, 接線方向, 曲率が指定された場合,  $v_0, v_2$  をなんらかの方法で定めれば, 有理 3 次 Bézier 曲線が一意に定まる.

$v_0, v_2$  は, 元の美的曲線と近似された曲線上の点位置の誤差の二乗和を最小化するように最適化手法を使って求める. 有理 Bézier 曲線のパラメータ  $t_a$  の点を  $\mathbf{x}(t_a)$  とする (図 1).  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  と  $\dot{\mathbf{x}}(t_a)$  から  $t_a$  における方向角の変化  $\theta_a$  が求まる. 様々な  $t_a$  に関して, 方向角  $\theta_a$  の美的曲線上の点と  $\mathbf{x}(t_a)$  の差分の二乗和を  $f(v_0, v_2)$  とし,  $f(v_0, v_2)$  を最小化する  $v_0, v_2$  を求める.

美的曲線を有理 3 次 Bézier 曲線で近似的に表現した結果を, 図 2,3 に示す. rms は root mean square を, errMax は最大誤差を表す. 我々の得られた結果から, 方向角の変化が 90 度以下の一本の美的曲線は,  $\rho = 0$  の近傍を含む場合を除き, 曲率対数分布図 (LCH) の直線性をほぼ保ちながら一本の有理 3 次 Bézier 曲線によって近似できることを確認した. 擬似美的曲線セグメントの生成時間は, Pentium D 3.2GHz のコンピュータで 1 セグメントあたりおおよそ数十 ms である (美的曲線セグメントは, 数 ms 以下). LCH の直線性がほぼ保たれることから, 近似された有理 3 次 Bézier 曲線を擬似美的曲線と呼ぶ. 我々の結果では, 最適化により解が求まる場合にはほぼ LCH の直線性が保たれることを確認しているが, もし十分に LCH の直線性が保たれないと判断された場合には, 曲線セグメントを複数セグメントに分割し本手法を適用することが考えられる.

### 4 有理 3 次 Bézier の曲率単調条件

擬似美的曲線は, 曲率対数分布図の直線性がほぼ保たれるが, 曲率の単調性は保証されない. そこで, 曲率単

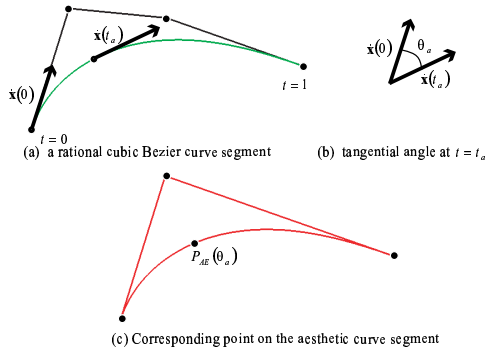


図1 有理 Bézier 曲線上の  $t = t_a$  の点と美的曲線上の対応する点

調性を確認するために、有理 3 次 Bézier 曲線の曲率単調条件式を導く。なお、式が非常に複雑になりため、導出の手法と概要のみを述べる。

有理 3 次 Bézier 曲線を、

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{P}(t)}{w(t)} = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(t)\mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(t)w_i} \quad t \in [0, 1] \quad (5)$$

によって表す。  $B_i^3(t)$  は Bernstein 多項式であり、  $\mathbf{P}_i = w_i \mathbf{b}_i$ 、  $\mathbf{b}_i \in \mathbf{E}^2$  は制御点ベクトル、  $w_i \in \mathbf{R}^+$  はウェイトである。

$$\Delta^r \mathbf{P}_j = \Delta^{r-1} \mathbf{P}_{j+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{P}_j, \quad (6)$$

$$\Delta^r w_j = \Delta^{r-1} w_{j+1} - \Delta^{r-1} w_j, \quad (7)$$

によって定義される iterated forward difference operator  $\Delta^r$  [3] を用いると、  $p(t)$  and  $w(t)$  は、

$$\mathbf{p}(t) = \Delta^0 \mathbf{P}_0 + 3\Delta^1 \mathbf{P}_0 t + 3\Delta^2 \mathbf{P}_0 t^2 + \Delta^3 \mathbf{P}_0 t^3, \quad (8)$$

$$w(t) = \Delta^0 w_0 + 3\Delta^1 w_0 t + 3\Delta^2 w_0 t^2 + \Delta^3 w_0 t^3. \quad (9)$$

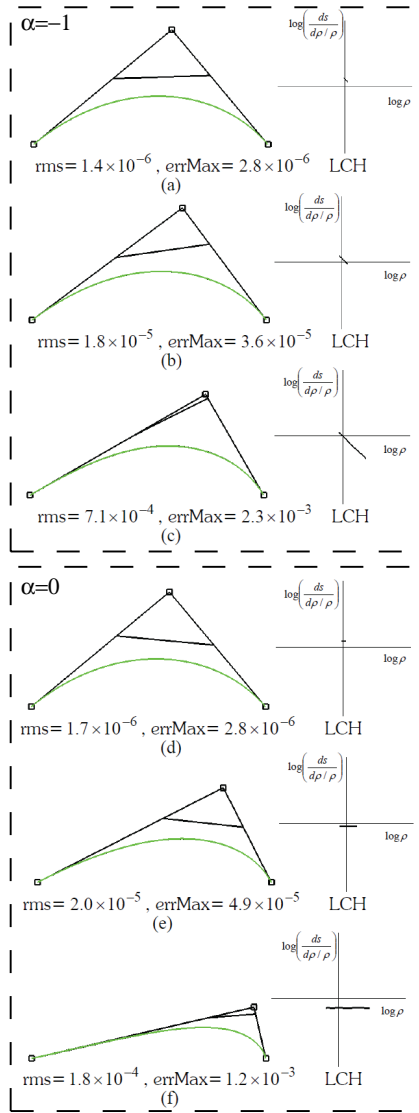


図2 擬似的美的曲線と曲率対数分布図 ( $\alpha = -1, 0$ )

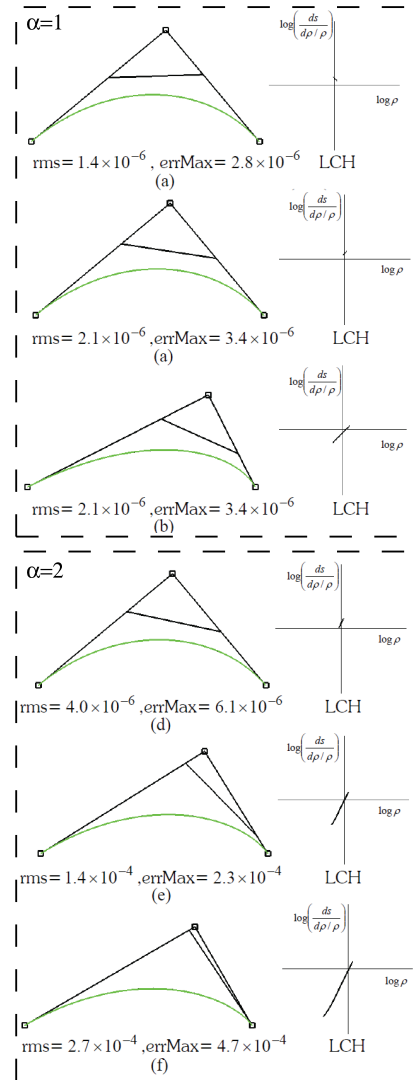


図3 擬似的美的曲線と曲率対数分布図 ( $\alpha = 1, 2$ )

となる．後に述べるように，式を  $t$  のべき乗によって整理する必要があるため， $\mathbf{p}(t)$ ,  $w(t)$  を Bernstein 基底ではなく，べき乗によって表す．

曲率  $\kappa$  の弧長  $s$  による微分は，

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{\det(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^{(3)}) \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} - 3 \det(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^6} \quad (10)$$

によって表される [3]．ここに， $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x}^{(3)}$  は，それぞれ， $\mathbf{x}$  の  $t$  による 1 階，2 階，3 階微分である． $t \in [0, 1]$  において  $\frac{d\kappa}{ds} \geq 0$  または  $\frac{d\kappa}{ds} \leq 0$  であるならば，曲線は（厳密ではなく）曲率単調である．この曲率単調の定義は， $t \in [0, 1]$  において  $\frac{d\kappa}{ds} = 0$  で一定の場合も含むので，曲率一定の円も含めていることに注意されたい．

制御点位置がすべて異なると仮定することにより，実際には式 (10) の右辺の分子のみを調べればよい． $\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}^{(3)}(t))$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t)$  を計算し整理すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} & \det(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}^{(3)}(t)) \\ &= \left( (w(t)w^3(t) - 3\dot{w}(t)\ddot{w}(t))\det(\mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) \right. \\ & \quad + 3\dot{w}(t)^2\det(\mathbf{p}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) - w(t)\dot{w}(t)\det(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}^{(3)}(t)) \\ & \quad - 3w(t)\dot{w}(t)\det(\dot{\mathbf{p}}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) \\ & \quad \left. + w(t)^2\det(\dot{\mathbf{p}}(t), \mathbf{p}^{(3)}(t)) \right) / w(t)^4. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left( w(t)^2\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) \right. \\ & \quad \left. - 2w(t)\dot{w}(t)\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) + \dot{w}(t)^2\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{p}(t) \right) / w(t)^4 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) &= \left( \ddot{w}(t)\det(\mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) + \right. \\ & \quad \left. w(t)\det(\dot{\mathbf{p}}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) - \dot{w}(t)\det(\mathbf{p}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) \right) / w(t)^3 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \left( (w(t)\dot{w}(t)\ddot{w}(t) - 2\dot{w}(t)^3)\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{p}(t) \right. \\ & \quad + (4w(t)\dot{w}(t)^2 - w(t)^2\ddot{w}(t))\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) \\ & \quad - w(t)^2\dot{w}(t)\mathbf{p}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t) - 2\dot{w}(t)w(t)^2\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) \\ & \quad \left. + w(t)^3\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t) \right) / w(t)^5 \end{aligned} \quad (14)$$

式 (11), (12), (13), (14) の右辺の分母と分子をそれぞれ， $k_{n1}, k_{d1}, k_{n2}, k_{d2}, k_{n3}, k_{d3}, k_{n4}, k_{d4}$  と置くと，式 (10) の分子は

$$K(t) = \frac{k_{n1}}{k_{d1}} \frac{k_{n2}}{k_{d2}} - 3 \frac{k_{n3}}{k_{d3}} \frac{k_{n4}}{k_{d4}} \quad (15)$$

となる． $k_{d1}k_{d2} = k_{d3}k_{d4} = w(t)^8$  であるので，曲率単調性を調べるためには  $K(t)$  の分子

$$K_n(t) = k_{n1}k_{n2} - 3k_{n3}k_{n4} \quad (16)$$

を調べればよい．

$k_{n1}, k_{n2}, k_{n3}, k_{n4}$  を  $t$  のべき乗に関して整理すると，

$$k_{n1} = \sum_{i=0}^5 \alpha_i t^i \quad k_{n2} = \sum_{i=0}^8 \beta_i t^i \quad k_{n3} = \sum_{i=0}^3 \gamma_i t^i \quad k_{n4} = \sum_{i=0}^{10} \eta_i t^i \quad (17)$$

を得る．ここに， $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \eta_i$  は  $t^i$  の項の係数である．ここで，高次の項の係数は打消しが生じ，予想されるよりも次数が低くなっていることに注意されたい． $K_n(t)$  は 13 次になることが予想されるが，13 次の項において打消しが生じ係数が 0 になるため，実際には 12 次式となる．

$K_n(t)$  の基底を Bernstein 多項式に変換し（従って，12 次の Bézier 曲線となる），12 次 Bézier の制御点座標

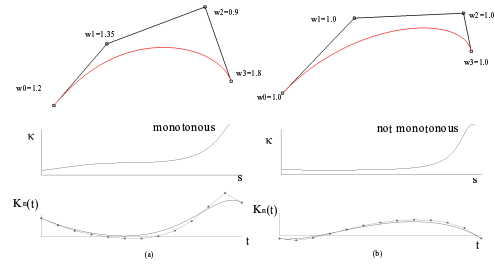


図 4 有理 3 次 Bézier の曲率単調性の確認

がすべて同符号であれば（すなわち制御ポリゴンが  $x$  軸と交差しなければ）曲率単調となる．もし，そうでない場合は，De Casteljau のアリゴリズムで再帰的に分割し，分割された両端の制御点座標が異符号であれば曲率単調ではなく，すべての制御点座標が同符号であれば曲率単調であると判定できる．図 4 に曲率単調性を確認した結果を示す．

## 5 典型的 Class A Bézier 曲線の対話的制御

Class A Bézier 曲線 [4] は，G. Farin が提案した曲率および捩率の単調な曲線である． $n$  次 Bézier 曲線の制御点を  $\mathbf{b}_i (0 \leq i \leq n)$ ,  $\Delta \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j (0 \leq j \leq n-1)$  とする．ある行列  $M$  が与えられ， $\Delta \mathbf{b}_j = M^j \Delta \mathbf{b}_0$  が成り立つとする． $t \in [0, 1]$  および  $|\mathbf{v}| = 1$  である任意の  $\mathbf{v}$  に関して， $M$  が次式を満足するとき，

$$|(1-t)\mathbf{v} + tM\mathbf{v}| \geq |\mathbf{v}| \quad (18)$$

制御点  $\mathbf{b}_i$  によって生成される曲線は，曲率および捩率が単調な Class A Bézier 曲線となる．

平面 Class A Bézier 曲線はの特別な場合として， $M$  が角度  $\theta (< \pi/2)$  の回転と倍率  $s$  のスケール変換との合成変換を行う行列であり， $\cos \theta > \frac{1}{s}$  を満足する場合，式 (18) の条件が満たされることが知られている [4, 8]．このような  $M$  によって定義される Class A Bézier 曲線は，典型的曲線 (typical curve) と呼ばれる．

典型的な平面 Class A Bézier 曲線は，2 つの制御点位置  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ ，および行列  $M$  を構成する回転角  $\theta$  とスケール  $s$ （ただし， $\cos \theta > \frac{1}{s}$ ）を与えることによって，一意に描くことができる．しかしながら，終点がどこにくるのが描いてみないと分からず対話的な制御性に欠ける．そこで，本研究では，3 点  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  から典型的な Class A Bézier 曲線を描く手法を提案する [19]． $\Delta \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_k (k = 0, 1)$  とし， $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{a}_0 / |\Delta \mathbf{a}_0|$  とする． $\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0$ ， $\theta$  は  $\Delta \mathbf{a}_0$  と  $\Delta \mathbf{a}_1$  のなす角の  $\frac{1}{n-1}$  であるので， $\mathbf{b}_1 (= \mathbf{b}_0 + |\Delta \mathbf{b}_0| \mathbf{u})$  および  $s$  を求めればよい． $\mathbf{b}_0 = |\Delta \mathbf{b}_0|$  とし， $\Delta \mathbf{b}_j = M^j \Delta \mathbf{b}_0$  の関係から，次式の  $f(\mathbf{b}_0, s)$  がゼロベクトルになるような， $\mathbf{b}_0, s$  を求めれば

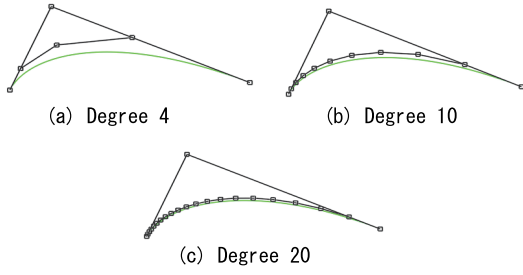


図5 対話的に生成された典型的な Class A Bézier 曲線

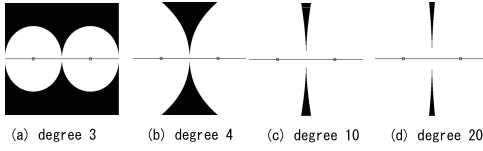


図6 典型的 Class A Bézier の描画可能領域

よい。

$$\mathbf{f}(b_0, s) = \sum_{j=0}^{n-1} b_0 s^j R^j \mathbf{u} - (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0) \quad (19)$$

$R$  は回転角  $\theta$  の回転行列であり、従って  $M = sR$  である。 $\mathbf{f}(b_0, s) = \mathbf{0}$  は、 $n = 3$  のときは2次式になるため直接  $b_0, s$  が求められることができ、 $n > 3$  の場合には最適化手法 (Fletcher-Reeves の共役勾配法) を用いた。

$b_0, s$  の一意性は、2つのベクトル  $\frac{\partial \mathbf{f}(b_0, s)}{\partial b_0}$  と  $\frac{\partial \mathbf{f}(b_0, s)}{\partial s}$  が線形独立であることから確認することができる。これら2つのベクトルで構成される  $2 \times 2$  行列式を  $d_2$  とすると、

$$d_2 = b_0 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \left( i s^{i-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} s^{2j} \right) \sin(i\theta) \right) \quad (20)$$

となる。 $d_2$  は、 $0 < \theta < \pi/2, b_0 > 0, s > 0$  という条件のもと、明らかに正の値になる。従って、上記の2つのベクトルは線形独立であるので、 $b_0, s$  は (解が求まる場合には) 一意である。図5に3点から対話的に生成された  $n = 4, 10, 20$  次の典型的な Class A Bézier 曲線を示す。

3点  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の配置から算出された Class A Bézier のパラメータは、典型的な Class A Bézier の条件を満たさない場合がある。そこで、 $\mathbf{a}_0 = [-1 \ 0]^T, \mathbf{a}_2 = [1 \ 0]^T$  とし、 $\mathbf{a}_1$  の位置を移動させ、Class A Bézier が描画可能な場合には  $\mathbf{a}_1$  の位置を白で塗り、描画可能でない場合には黒で塗りつぶした描画可能領域を図6に示す。

## 6 典型的 Class A Bézier 曲線の性質

本節では、典型的な平面 Class A Bézier 曲線が、次数  $n$  を高くしていくと対数螺旋に近づくことを示す。このことは、Class A Bézier の制御点が対数螺旋上に存在

し、Bézier 曲線の制御ポリゴンが次数  $n$  が無限大に近づくに従って曲線自体に収束することから示すことができる。原点を中心とする対数螺旋は、 $i$  を虚数単位とし、複素平面上で、

$$\mathbf{LS}(\theta) = r_0 e^{k\theta i} \quad (21)$$

で (図7(a) を参照) で表わされる。ここに、 $r_0 (> 0)$  および  $k (0 \leq \cot(k) \leq \pi)$  は定数であり、 $\theta$  は  $x$  軸とのなす角である。ある  $\theta_0$  における、中心と  $\mathbf{LS}(\theta_0)$  との距離は  $e^{k\theta_0}$  である。 $\theta_0$  から  $\theta_d$  だけ回転した点  $\mathbf{LS}(\theta_0 + \theta_d)$  における原点からの距離と、 $\mathbf{LS}(\theta_0)$  における原点からの距離の比は、

$$\frac{\mathbf{LS}(\theta_0 + \theta_d)}{\mathbf{LS}(\theta_0)} = e^{k\theta_d} = \text{const.} \quad (22)$$

である。従って、対数螺旋は、角度が  $\theta$  回転したときに、原点との距離が定数倍されるような曲線である。この性質を使って、典型的 Class A Bézier 曲線を定義する制御点が、対数螺旋上の乗ることを示す。具体的には、典型的 Class A Bézier 曲線の制御点から、ある中心  $\mathbf{p}$  が求まり、ある角度  $\phi$  回転するごとに中心からの距離がある定数  $r$  倍されることを示す。このことが示されたら、中心  $\mathbf{p}$  を原点とする式 (21) の  $r_0, k$  を容易に求めることができる。従って、対数らせんを一意に求めることができる。

典型的 Class A Bézier 曲線の任意の連続する3個の制御点  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  について、三角形  $\mathbf{p}\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$  と  $\mathbf{p}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$  が相似三角形になるような中心  $\mathbf{p}$  を求めることができる。中心  $\mathbf{p}$  は、 $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} (i = 0, 1)$  を  $1 : s$  ( $s$  は、式 (19) の  $s$  と同じであることに注意されたい) に内分するアポロニウスの円の交点として求められる (図7(b) を参照)。典型的 Class A Bézier 曲線の制御点の生成規則を適用し、第4の制御点  $\mathbf{b}_3$  を求めると、アポロニウスの円を3個作成することができる。 $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1} (i = 0, 1, 2)$  によるアポロニウスの円を  $c_i (i = 0, 1, 2)$  とする。中心  $\mathbf{p} = [p_x \ p_y]$  を、 $c_0$  と  $c_1$  の交点を通る直線  $l_0$  と  $c_1$  と  $c_2$  を通る直線  $l_1$  の交点として求めると、 $\mathbf{b}_0 = [b_{0x} \ b_{0y}]$ 、 $\mathbf{u} = [u_x \ u_y] (= \Delta \mathbf{a}_0 / |\Delta \mathbf{a}_0|)$  としたとき、

$$p_x = (b_{0x} + s^2 b_{0x} + u_x - s((2b_{0x} + u_x) \cos \theta + u_y \sin \theta)) / (1 + s^2 - 2s \cos \theta) \quad (23)$$

$$p_y = (b_{0y} + s^2 b_{0y} + u_y - s((2b_{0y} + u_y) \cos \theta + s u_x \sin \theta)) / (1 + s^2 - 2s \cos \theta) \quad (24)$$

となり、 $\mathbf{p}$  は  $c_0, c_1, c_2$  のいずれの円上にも存在することが確認できる。従って、 $\mathbf{p}$  は、 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  の中心となる。同様に、 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  の中心を求めると、明らかに上記の  $\mathbf{p}$  となる。この処理を繰り返し替えることにより、 $\mathbf{p}$  は、任意  $i (> 0)$  に関して  $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{b}_{i+2}$  の中心となる。これより、中心よりある角だけずれたとき、中心からの距離も  $s$  倍されることが示された。従って、典型的



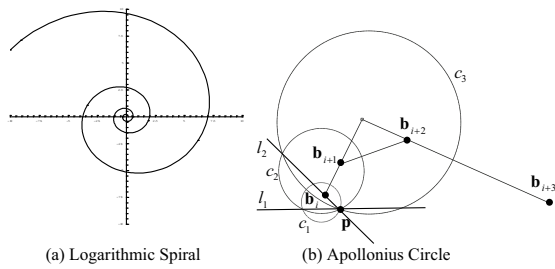


図7 対数螺旋とアポロニウスの円

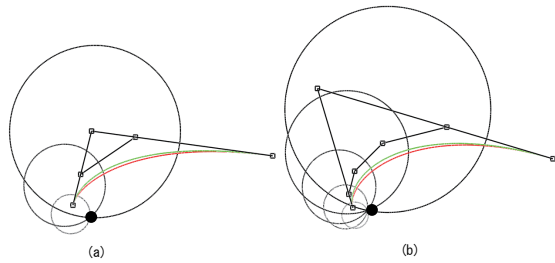


図8 Class A Bézier 曲線の制御点を対数螺旋上の点とした時の対数螺旋の中心

Class A Bézier 曲線の制御点に外接する対数螺旋が存在する。Bézier 曲線の制御ポリゴンは次数  $n \rightarrow \infty$  で曲線自体に収束する。このことから、 $n \rightarrow \infty$  の極限で、典型的 Class A Bézier 曲線は対数螺旋となる。

図8において、制御ポリゴンに近い側の曲線が Class A Bézier 曲線であり、制御ポリゴンから遠い側の曲線（内側の曲線）が対数螺旋である。また、対数螺旋の中心を黒丸で表す。

## 7 まとめと今後の研究の可能性

本報告では、有理3次 Bézier 形式の美的曲線を提案するとともに、典型的な平面 Class A Bézier 曲線の対話的制御法について述べた。また、典型的な平面 Class A Bézier 曲線は、次数を高くしていくと、美的曲線の特別な場合である対数螺旋に近づくことを示した。

美的曲線、擬似美的曲線、典型的な平面 Class A Bézier の特徴を比較したものを表1に示す。美的曲線は、積分形式であるため、既存のCADシステムとの互換性を持たない。擬似美的曲線は、Bézier 形式で表されるが、曲率の単調性が理論的に保証されない（確認は可能である）。Class A Bézier 曲線は、典型的でない一般的なものに対しては、対話的生成手法自体が解明されていない。今後、典型的 Class A Bézier 曲線並みのシンプルさを持ち、曲率単調性が保証され、（願わくば）美的曲線のすべての場合を近似することのできる曲線が望まれる。Class A Bézier 曲線の有理化にヒントがあるのではないかと期待している。

表1 美的曲線、擬似美的曲線、典型的な平面 Class A Bézier 曲線の現状での比較

	Aes. Curve	Quasi. Aes. Curve	Class A
曲率変化の制御			×
Bézier 形式	×		
有理式 Bézier 形式	×		×
含変曲点			×
曲率単調性	(保証可)	(確認可)	(保証可)
LCHの直線性		ほぼ直線	?

$n(\geq 2)$  次有理 Bézier 曲線の曲率単調性の条件式は、 $n = 3$  以外の場合にも4節と同様な手法で、 $4 + (n-2) \times 8$  次式になることが  $n \leq 5$  の場合は確認できている。よりエレガントかつ一般次元での証明が望まれる。また、曲線の空間曲線化、微分幾何量の連続性だけではなく美しさを考慮したセグメント間の連続性の解明など多くの研究の余地が残されている。

## 参考文献

- [1] C. Baumgarten and G. Farin. Approximation of logarithmic spirals. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 14, No. 6, pp. 515–532, 1997.
- [2] A. D. Dietz and B. Piper. Interpolation with cubic spirals. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 21, No. 2, pp. 165–180, 2004.
- [3] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, 2001.
- [4] Gerald Farin. Class a bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 23, No. 7, pp. 573–581, 2006.
- [5] W. H. Frey and D. A. Field. Designing bézier conic segments with monotone curvature. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 17, No. 6, pp. 457–483, 2000.
- [6] Toshinobu Harada, Fujichi Yoshimoto, and Masamitsu Moriyama. An aesthetic curve in the field of industrial design. In *Proceedings of IEEE Symposium on Visual Languages*, pp. 38–47. IEEE, IEEE Computer Society Press, 1999.
- [7] M. Higashi, K. Kaneko, and M. Hosaka. Generation of high quality curve and surface with smoothly varying curvature. *Eurographics*, pp. 79–92, 1988.
- [8] Y. Mineur. A shape controlled fitting method for bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 15, No. 9, pp. 879–891, 1998.
- [9] Kenjiro T. Miura. A general equation of aesthetic curves and its self-affinity. *Computer Aided Design and Applications*, Vol. 3, No. 1-4, pp. 457–464, 2006.
- [10] N. S. Sapidis and W. H. Frey. Controlling the curvature of quadratic bézier curve. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 9, No. 2, pp. 85–91, 1992.
- [11] L. Wang, K. T. Miura, E. Nakamae, T. Yamamoto, and T. J. Wang. An approximation approach of the clothoid curve defined in the interval  $[0, \pi/2]$  and its offset by free-form curves. *Computer Aided Design*, Vol. 33, No. 14, pp. 1049–1058, 2001.
- [12] Yulin Wang, Bingyang Zhao, Luzou Zhang, Jiachuan Xu, Kangchang Wang, and Shunchun Wang. Designing fair curves using monotone curvature pieces. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 21, No. 5, pp. 515–527, 2004.
- [13] Norimasa Yoshida and Takafumi Saito. Interactive aesthetic curve segments. *The Visual Computer*, Vol. 22, No. 9-11, pp. 896–905, 2006.
- [14] Norimasa Yoshida and Takafumi Saito. Quasi-aesthetic curves in rational cubic bezier forms. *Computer Aided Design and Applications to appear*, 2007.
- [15] 吉田典正, 斎藤隆文. 美しい曲線の全体像解明と対話的制御. *Visual Computing グラフィクスとCAD合同シンポジウム*, pp. 77–82, 2006.
- [16] 吉田典正, 斎藤隆文. 美的曲線の有理3次 bezier 近似. *グラフィクスとCAD研究会*, No. 125, pp. 25–30. 情報処理学会, 2006.
- [17] 原田利直, 森典彦, 杉山和夫. 曲線の物理的性質と自己アフィン性. *デザイン学研究*, Vol. 42, No. 2, pp. 33–40, 1995.
- [18] 三浦憲二郎. 美しい曲線の一般式. *Visual Computing グラフィクスとCAD合同シンポジウム*, pp. 227–232, 2005.
- [19] 平岩智之, 吉田典正, 斎藤隆文. 平面 class a bezier 曲線の対話的制御. *情報処理学会第69回全国大会*, pp. 173–207, 2007.