

# 美的曲線の有理 3 次 Bézier 近似

吉田典正\* 斎藤隆文\*\*

\* 日本大学 \*\* 東京農工大学

E-mail: norimasa@acm.org txsaito@cc.tuat.ac.jp

美的曲線は、曲率変化の単調な美しい曲線であるが、積分形式で表されるため従来の CAD システムとの互換性を持たず、特別な形式で表現しなければならない。本報告では、一つの美的曲線セグメントを、曲率の単調性を保証した一つの有理 3 次 Bézier 曲線に近似する手法を提案する。曲率の単調性を保証するために、有理 3 次 Bézier 曲線の曲率の単調性を確認する手法についても述べる。また、提案手法を実装し、種々の美的曲線セグメントに適用したところ、方向角の変化が 90 度以内の場合に、一つの美的曲線セグメントを曲率の単調性を保ちながら一つの有理 3 次 Bézier 曲線セグメントに近似できることを確認した。

## Approximation of an Aesthetic Curve Segment by a Rational Cubic Bézier Curve Segment

Norimasa Yoshida\* and Takafumi Saito\*\*

\* Nihon University \*\* Tokyo University of Agriculture and Technology

An aesthetic curve is a curve of monotone curvature represented by the quadrature form. An aesthetic curve in its quadrature form is not compatible with current CAD systems. In this paper, we present a method that approximates one aesthetic curve segment by one rational cubic Bézier curve segment. We also present a method for checking the monotonicity of a rational cubic Bézier curve segment. We have implemented our algorithm and verified that one aesthetic curve segment can be approximated by one rational cubic Bézier curve segment when the change of tangential angle is less than 90 deg.

### 1 はじめに

美的曲線は、原田ら [5, 6] によって独自に調査された性質（曲率対数分布図の直線性）に基づく新たな曲線である。原田は、自然物や人工物における様々な美しい曲線の多くはその曲率対数分布図が直線で近似できるという性質を見出した。三浦 [7] は、美的曲線の一般式を示した。吉田と斎藤は、三浦によって示された一般式に基づき、曲線の全体像を解明するとともに、対話的に制御する手法を考案した [12, 13]。

既存の CAD システムは多項式・有理式曲線・曲面を用いているため、積分形式で表される美的曲線を取り込んでも、多くの機能がそのまま利用できないという問題がある。そこで、本研究では、美的曲線を

曲率の単調性を保証した 3 次有理 Bézier 曲線で表現する手法を提案する。曲率の単調性を保証するために、3 次有理 Bézier 曲線の曲率の単調性を確認する手法も示す。提案手法により、方向角の変化が 90 度以内の 1 本の美的曲線を、曲率対数分布図の直線をほぼ保ったまま、1 本の 3 次有理 Bézier 曲線で近似することが可能となった。

### 2 関連研究

美的曲線に特殊な場合として含まれる対数螺旋およびクロソイド曲線をスプライン近似する研究がすでに行われている。Baumgarten と Farin の対数螺旋を 3 次の有理 Bezier で近似する研究 [1] は、優れた近似を行うものであるが、対数螺旋の特殊な性質を用いているためそのまま美的曲線に一般化させる

ことはできない．Wang らは，積分式をテイラー展開して近似することによって，クロソイド曲線をスプライン近似する手法を示している [14]．美的曲線の近似は，三浦らによって 3 次（多項式の）B-spline による近似が行われている [8]．美的曲線は円弧を含むことから，特に曲線セグメントが近い場合に有理式で近似したほうが誤差が少なく（従って，少ないセグメント数）近似できることが期待される．また，上記いずれの手法も近似対象の曲線は曲率単調であるが，近似された曲率単調性は保証されていない．本研究では，美的曲線セグメントを有理 3 次 Bézier 曲線セグメントで近似するとともに，近似された曲線が曲率単調であることを確認する手法を示す．

Bézier の曲率単調性の条件は，特定の次数の多項式または有理曲線に関して求められてきた．Sapidis と Frey は，2 次の多項式 Bézier に関する必要十分条件を示している [10]．Frey と Field は 2 次有理 Bézier に関する曲率単調性の条件 [4] を示した．Dietz と Piper は，数値計算によって 3 次の Bezier 曲線が螺旋になるように（従って，曲率単調になるように）コントロールする手法を提案した [2]．彼らの手法では，与えられた位置と接線方向を補間するために事前に作成された表を利用している．Wang らは，3 次および  $n$  次の多項式 Bézier に関する曲率単調性の十分条件を述べている [15]．有理式は，多項式の式と比べて，導関数が非常に複雑になる．曲率の単調性を調べるためには 3 階導関数が必要であり，非常に複雑な形式になる．我々の曲率単調性の確認の手法は Wang らの手法に基づくが，式が爆発的になるのを防ぐために工夫をしている点，および Wang らは曲率単調性の必要条件のみを利用しているが，より厳密に曲率の単調性を調べる手法を示している点で異なっている．

### 3 美的曲線

標準形における方向角  $\theta$  の美的曲線上の点  $P_{AE}(\theta)$  は次式によって与えられる [12, 13]．

$$P_{AE}(\theta) = \begin{cases} \int_0^\theta e^{(1+i)\Lambda\psi} d\psi & \text{if } \alpha = 1 \\ \int_0^\theta ((\alpha - 1)\Lambda\psi + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{i\psi} d\psi & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

ここに， $i$  は虚数単位， $\alpha$  は曲率対数分布図における直線の傾き， $\Lambda$  は  $\alpha \neq 1$  の場合には標準形の基準

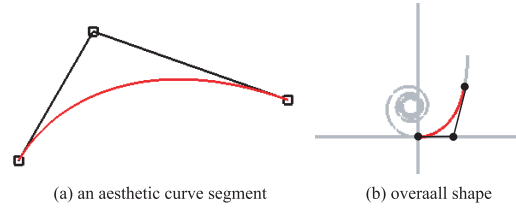


図 1  $\alpha = -1$  の美的曲線セグメントとその全体像

点の位置を決める変数であり， $\alpha = 1$  の場合には曲線形状を決定するパラメータである．美的曲線セグメントは， $\alpha$  と 3 個の制御点位置が指定されたときに，制御点位置から  $\Lambda$  を決定し，標準形の美的曲線にアフィン変換を施すことにより描かれる．図 1 に  $\alpha = -1$  の美的曲線セグメントと曲線の全体像を示す．美的曲線は， $\alpha = -1$  のときにクロソイド曲線， $\alpha = 1$  のときに対数螺旋， $\alpha = 2$  のときに円のインボリュート曲線になり，これらの曲線の一般化として捉えることもできる．

### 4 有理 3 次 Bézier の曲率単調性

本節では，有理 3 次 Bézier 曲線が曲率単調であるか否かを確認するための手法を示す．有理式の場合，非常に式が複雑になり，その式全てを示すことはできないので，概要のみを述べる．

有理 3 次 Bézier 曲線を，

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{p}(t)}{w(t)} = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(t) w_i} \quad t \in [0, 1] \quad (2)$$

によって表す． $B_i^3(t)$  は Bernstein 多項式であり， $\mathbf{P}_i = w_i \mathbf{b}_i$ ， $\mathbf{b}_i (\in \mathbf{E}^2)$  は制御点ベクトル， $w_i (\in \mathbf{R}^+)$  はウェイトである．

$$\Delta^r \mathbf{P}_j = \Delta^{r-1} \mathbf{P}_{j+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{P}_j, \quad (3)$$

$$\Delta^r w_j = \Delta^{r-1} w_{j+1} - \Delta^{r-1} w_j, \quad (4)$$

によって定義される iterated forward difference operator  $\Delta^r$  [3] を用いると， $p(t)$  and  $w(t)$  は，

$$\mathbf{p}(t) = \Delta^0 \mathbf{P}_0 + 3\Delta^1 \mathbf{P}_0 t + 3\Delta^2 \mathbf{P}_0 t^2 + \Delta^3 \mathbf{P}_0 t^3, \quad (5)$$

$$w(t) = \Delta^0 w_0 + 3\Delta^1 w_0 t + 3\Delta^2 w_0 t^2 + \Delta^3 w_0 t^3. \quad (6)$$

となる．後に述べるように，式を  $t$  のべき乗によって整理する必要があるため，本研究では， $\mathbf{p}(t)$ ， $w(t)$  を Bernstein 基底ではなく，べき乗によって表す．

$\kappa$  の  $s$  による微分は,

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{\det(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^{(3)}) \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} - 3 \det(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^6} \quad (7)$$

によって表される [3, 9]. ここに,  $\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^{(3)}$  は, それぞれ,  $\mathbf{x}$  の  $t$  による 1 階, 2 階, 3 階微分である.  $t \in [0, 1]$  において  $\frac{d\kappa}{ds} \geq 0$  または  $\frac{d\kappa}{ds} \leq 0$  であるならば, 曲線は (厳密ではなく) 曲率単調である. この曲率単調の定義は,  $t \in [0, 1]$  において  $\frac{d\kappa}{ds} = 0$  で一定の場合も含むので, 曲率一定の円も含めていることに注意されたい.

制御点位置がすべて異なると仮定することにより, 実際には式 (7) の右辺の分子のみを調べればよい.  $\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}^{(3)}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t), \det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t)$  を計算し整理すると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \det(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}^{(3)}(t)) &= \left( (w(t)w^3(t) - 3\dot{w}(t)\ddot{w}(t))\det(\mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) \right. \\ &\quad + 3\dot{w}(t)^2\det(\mathbf{p}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) - w(t)\dot{w}(t)\det(\mathbf{p}(t), \mathbf{p}^{(3)}(t)) \\ &\quad - 3w(t)\dot{w}(t)\det(\dot{\mathbf{p}}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) \\ &\quad \left. + w(t)^2\det(\dot{\mathbf{p}}(t), \mathbf{p}^{(3)}(t)) \right) / w(t)^4. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left( w(t)^2\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) \right. \\ &\quad \left. - 2w(t)\dot{w}(t)\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) + \dot{w}(t)^2\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{p}(t) \right) / w(t)^4 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) = \left( \dot{w}(t)\det(\mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)) + w(t)\det(\dot{\mathbf{p}}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) - \dot{w}(t)\det(\mathbf{p}(t), \ddot{\mathbf{p}}(t)) \right) / w(t)^3 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \left( (w(t)\dot{w}(t)\ddot{w}(t) - 2\dot{w}(t)^3)\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{p}(t) \right. \\ &\quad + (4w(t)\dot{w}(t)^2 - w(t)^2\ddot{w}(t))\mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) \\ &\quad - w(t)^2\dot{w}(t)\mathbf{p}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t) - 2\dot{w}(t)w(t)^2\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) \\ &\quad \left. + w(t)^3\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t) \right) / w(t)^5 \end{aligned} \quad (11)$$

式 (8),(9),(10),(11) の右辺の分母と分子をそれぞれ,  $k_{n1}, k_{d1}, k_{n2}, k_{d2}, k_{n3}, k_{d3}, k_{n4}, k_{d4}$  と置くと, 式 (7) の分子は

$$K(t) = \frac{k_{n1} k_{n2}}{k_{d1} k_{d2}} - 3 \frac{k_{n3} k_{n4}}{k_{d3} k_{d4}} \quad (12)$$

となる.  $k_{d1}k_{d2} = k_{d3}k_{d4} = w(t)^8$  であるので, 曲率単調性を調べるためめには  $K(t)$  の分子

$$K_n(t) = k_{n1}k_{n2} - 3k_{n3}k_{n4} \quad (13)$$

を調べればよい.

$k_{n1}, k_{n2}, k_{n3}, k_{n4}$  を  $t$  のべき乗に関して整理する

と,

$$\begin{aligned} k_{n1} &= \sum_{i=0}^5 \alpha_i t^i & k_{n2} &= \sum_{i=0}^8 \beta_i t^i \\ k_{n3} &= \sum_{i=0}^3 \gamma_i t^i & k_{n4} &= \sum_{i=0}^{10} \eta_i t^i \end{aligned} \quad (14)$$

を得る. ここに,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \eta_i$  は  $t^i$  の項の係数である. ここで, 高次の項の係数は打消しが生じ, 予想されるよりも次数が低くなっていることに注意されたい.  $K_n(t)$  は 13 次になることが予想されるが, 13 次の項において打消しが生じ係数が 0 になるため, 実際には 12 次式となる.

$K_n(t)$  が  $t \in [0, 1]$  の範囲で,  $K_n(t) \geq 0$  または  $K_n(t) \leq 0$  であるならば, 対象とする曲線は曲率単調である. 曲率の単調性の確認は,  $K_n(t)$  を Bernstein 多項式  $B_i^{12}(t)$  によって

$$K_n(t) = \sum_{i=0}^{12} B_i^{12}(t) b_i \quad (15)$$

の形式に書き直すことによつて行う. もし全ての  $b_i$  が 0 以下または 0 以上であるならば, Bézier 曲線の凸閉包性より, 対象とする曲線が曲率単調であることが分かる. この条件を, 曲率単調性の十分条件と呼ぶ.  $b_0 b_{12} < 0$  であれば, 必ず  $K_n(t) = 0$  となる  $t$  が存在するので, 即座に曲率単調でないと判断することができる. この条件を, 曲率単調でない条件と呼ぶ.

曲率単調でない条件および曲率単調性の十分条件のどちらも満たさない場合, de Casteljau[3] アルゴリズムによつて曲線を分割し, 分割されたいずれかのセグメントが曲率単調でない条件を満たす場合には, 対象とする曲線セグメントは曲率単調でないことと決定できる. 分割されたどちらのセグメントも, 曲率単調の十分条件を満たす場合には, 対象とする曲線は, 曲率単調であると決定される. どちらの条件も満たさない場合には, 繰り返し de Casteljau アルゴリズムによつて分割を行い, 同様の処理を繰り返す. 分割されたすべてのセグメントが曲率単調性の十分条件を満たせば対象とする曲線は曲率単調であり, 一つでも曲率単調でないセグメントが存在すれば対象とする曲線は曲率単調ではない.

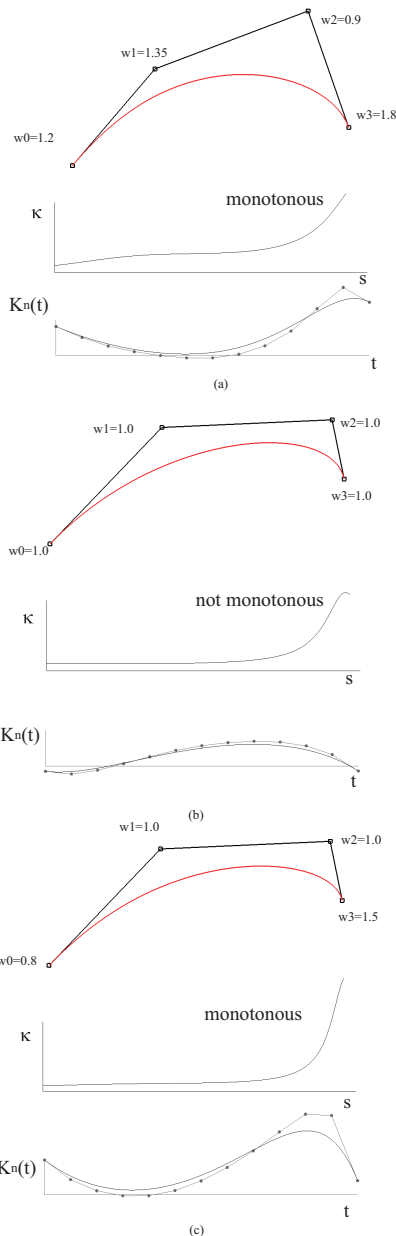


図2 有理 Bézier 曲線の曲率単調性の確認

## 5 美的曲線の有理 3 次 Bézier 近似

平面上の有理 3 次 Bézier 曲線セグメントは、4 個の制御点を持つので 12 個のパラメータを持つ。しかし、すべての制御点をスカラー倍しても、あるいは、制御点を順にある変数  $s (\neq 0)$  で  $s^0$  倍,  $s^1$  倍,  $s^2$  倍,  $s^3$  倍しても曲線形状は変わらないので、有理 3 次 Bézier 曲線の持つ自由度は 10 である。

美的曲線セグメントを近似する場合に、両端点の

位置 (4 自由度), 両端点での接線ベクトル方向 (2 自由度) および両端点での曲率 (2 自由度) を一致させるとすると、残りの自由度は 2 となる。この 2 つの自由度をなんらかの手段によって有理 3 次 Bézier 曲線で近似表現することが可能となる。

制御点  $\mathbf{b}_i$  から求まるベクトル  $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i$  とスカラー  $v_i$  を次のように定義する。

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}, \quad v_i = |\mathbf{v}_i| \quad (i = 0, 1, 2) \quad (16)$$

まず、12 個のパラメータのうち 2 つを適当に決める必要があるので、

$$w_1 = w_2 = (2.0 * \cos(\theta_D/2.0) + 1.0)/3.0 \quad (17)$$

とする。ここに  $\theta_D$  は、方向角の変化 ( $\mathbf{v}_0$  と  $\mathbf{v}_2$  のなす角) である。ここに設定した  $w_1, w_2$  の値は、円弧を表現する場合の 2 次 Bézier 曲線の第 2 の制御点のウェイトを次数上げ [3] したものである。両端点での位置を一致させることにより、 $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_3$  が定まる。また、両端点での接線方向を一致させることにより、 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_2$  が定まる。ここで、 $v_0, v_2$  が分かっているとすると、 $v_1$  も求まる。有理 3 次 Bézier 曲線のパラメータ  $t = 0$  および  $t = 1$  における曲率  $\kappa_0, \kappa_1$  は、次の式によって求めることができる [1]。

$$\kappa_0 = \frac{2w_0w_2}{3w_1^2} \frac{\det(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)}{v_0^3} \quad (18)$$

$$\kappa_1 = \frac{2w_1w_3}{3w_2^2} \frac{\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{v_2^3} \quad (19)$$

式 (18), (19) を  $w_0, w_3$  について解くことにより、 $w_0, w_3$  が求まる。以上より、両端点での位置、接線方向、曲率が指定された場合、 $v_0, v_2$  をなんらかの方法で定めれば、有理 3 次 Bézier 曲線が一意に定まる。

$v_0, v_2$  は、点位置の誤差の二乗和を最小化するように最適化手法を使って求める。有理 Bézier 曲線のパラメータ  $t_a$  の点を  $\mathbf{x}(t_a)$  とする (図 3)。 $\dot{\mathbf{x}}(0)$  と  $\dot{\mathbf{x}}(t_a)$  から  $t_a$  における方向角の変化  $\theta_a$  が求まる。様々な  $t_a$  に関して、方向角  $\theta_a$  の美的曲線上の点と  $\mathbf{x}(t_a)$  の差分の二乗和を  $f(v_0, v_2)$  とし、 $f(v_0, v_2)$  を最小化する  $v_0, v_2$  を求める。

## 6 実行結果

図 4, 5, 6, 7 に、 $\alpha = -1, 0, 1, 2$  の様々な曲線を、有理 3 次 Bézier 曲線で近似した結果を示す。方向角

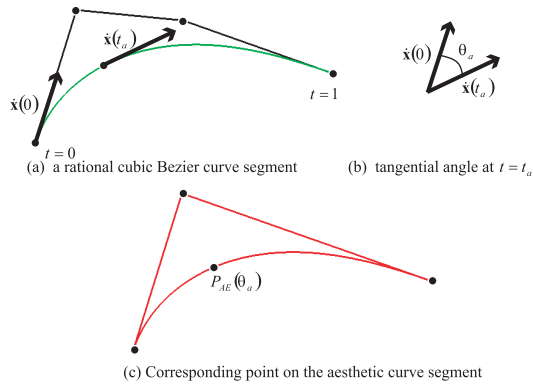


図3 有理 Bézier 曲線上の  $t = t_\alpha$  の点と美的曲線上の対応する点

の変化が大きくなるほど近似の度合いも悪くなる。そこで、これらの図において、方向角の変化はすべて、実用的に最も大きいと思われる 90 度としている。LCH は曲率対数分布図を表し、横軸が  $\log \rho$ 、縦軸が  $\log(\frac{ds}{d\rho})$  である。rms および errMax は、それぞれ、曲線長が 1 になるように正規化された、曲線位置の誤差の二乗平均の平方根と最大誤差を表す。制御点の配置が二等辺三角形である場合には、 $\alpha$  の値に関わらず円弧を表現することとなり、rms および errMax とも  $1e - 16$  (倍精度浮動小数点型の誤差) 程度となり、円弧を高い精度で表現できることが確認できた。なお、Bézier 曲線では、曲率  $\rho = 0$  の点を表現できないため、 $\alpha > 1$  の美的曲線で  $\rho = 0$  の近傍を含む場合には、最適化処理が局所解に落ち込むなどして安定しない場合がある。

図 4, 5, 6, 7 から、制御点により作られる三角形が二等辺三角形から離れるほど、曲線位置の誤差が大きくなり、従って、曲率対数分布図の直線性も崩れていく様子が分かる。しかし、曲率対数分布図の直線性は、原田らの結果 [5, 6] と比較して十分なものである。従って、1 本の有理 3 次 Bézier 曲線を、曲率対数分布図の直線性が保たれた 1 本の美的曲線として利用可能であることを示した。

## 7 まとめ

本研究では、方向角の変化が 90 度以内で、 $\rho = 0$  の近傍を含まない 1 本の美的曲線を、曲率の単調性を保証し、1 本の有理 3 次 Bézier 曲線として表現可能なことを示した。また、3 次有理 Bézier 曲線の曲

率単調性を、12 次の多項式によって確認できることを示した。

1 本の有理 Bézier 曲線によって曲率対数分布図の直線性を (ほぼ) 保つことが示せたことより、今後、従来の CAD システムと互換性のある自由曲線・曲面形式での美的曲線・曲面表現を考えることができることを示した。今後の課題としては、処理の効率化・安定化、曲線の接続や曲面化などがあげられる。

## 参考文献

- [1] C. Baumgarten, G. Farin, Approximation of logarithmic spirals, Computer Aided Geometric Design, Vol. 14, 1997.
- [2] A. D. Dietz and B. Piper, Interpolation with cubic spirals, Computer Aided Geometric Design, Vol. 21, No. 2, pp.165-180, 2004.
- [3] G. Farin, Curves and Surface for CAGD 4th Edition, Academic Press, 2001.
- [4] W. H. Frey, D. A. Field, Designing Bézier conic segments with monotone curvature. Computer Aided Geometric Design 17 (6), 457-483, 2000.
- [5] 原田利宣, 森典彦, 杉山和夫, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, Vol. 42, No.2, pp.33-40, 1995.
- [6] 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創成アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol. 13, No.3, pp.149-158, 1998.
- [7] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, Visual Computing グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, pp.227-232, 2005.
- [8] 三浦 憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, Visual Computing/グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, pp.83-88, 2006.
- [9] H. Pottmann, Curves and tensor product surfaces with third geometric continuity. In: Slaby, S., Stachel, H. (Eds.), Proceedings of Third International Conference on Engineering Graphics and Descriptive Geometry, vol. 2, 107-116, 1988.
- [10] N. S. Sapidis, W. H. Frey, Controlling the curvature of quadratic Bézier curve. Computer Aided Geometric Design, 9 (2), 85-91, 1992.
- [11] T. W. Sederberg, T. Nishita, Curve intersection using Bézier clipping. Computer-Aided Design 22 (9), 538-549, 1990.
- [12] 吉田典正, 齋藤隆文: 美しい曲線の全体像解明と対話的制御, Visual Computing/グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, pp.77-82, 2006.
- [13] N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segment, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.
- [14] L. Wang, K. T. Miura, E. Nakamae, T. Yamamoto and T. J. Wang, An approximation approach of the clothoid curve defined in the interval  $[0, \pi/2]$  and its offset by free-from curves, Computer-Aided Design, Vol.33, No.14, pp.1049-1058, 2001.
- [15] Y. Wang, B. Zhao, L. Zhang, J. Xu, K. Wang, S. Wang, Designing fair curves using monotone curvature pieces. Computer Aided Geometric Design, 21 (5), pp.515-527, 2004.

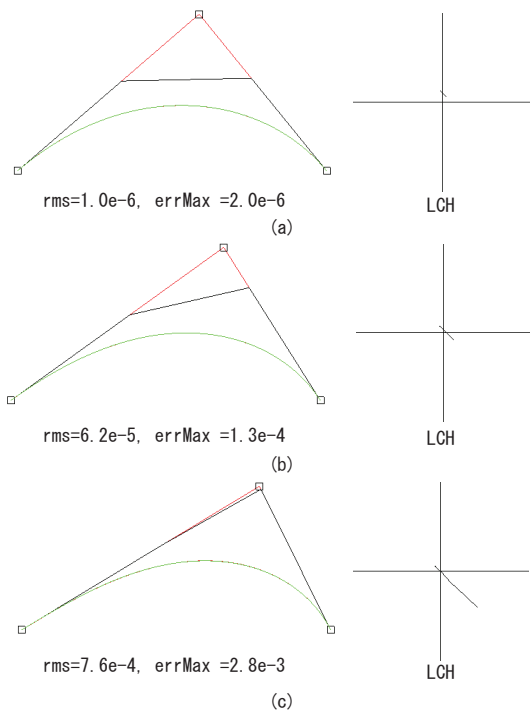


図 4  $\alpha = -1$  の美的曲線の有理 3 次 Bézier 曲線近似

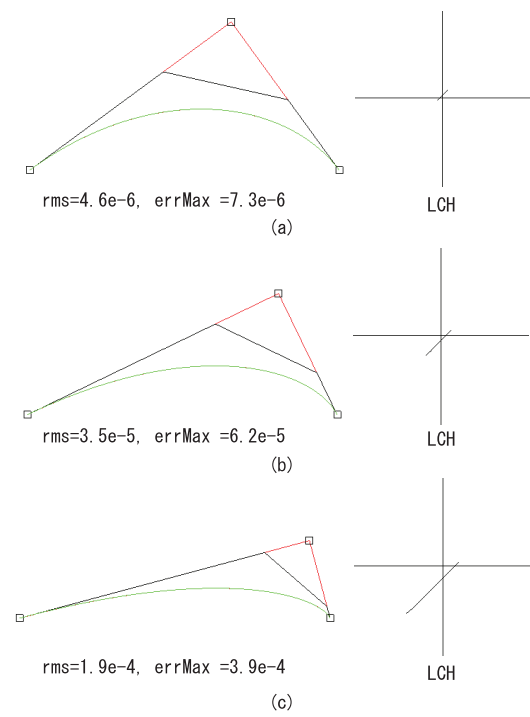


図 6  $\alpha = 1$  の美的曲線の有理 3 次 Bézier 曲線近似

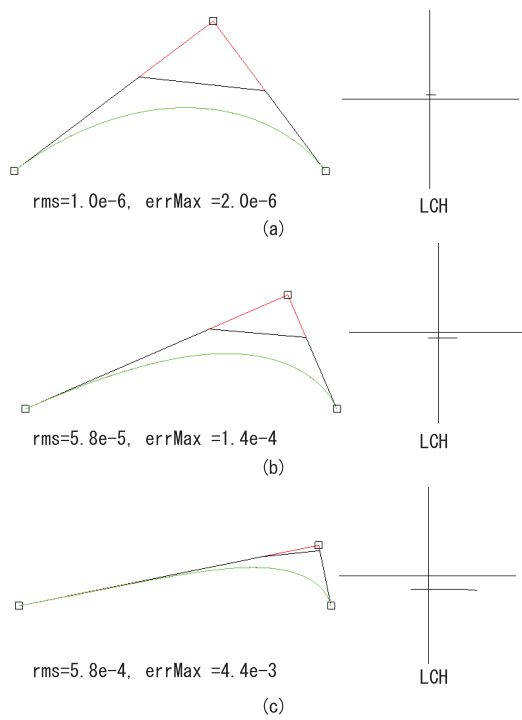


図 5  $\alpha = 0$  の美的曲線の有理 3 次 Bézier 曲線近似

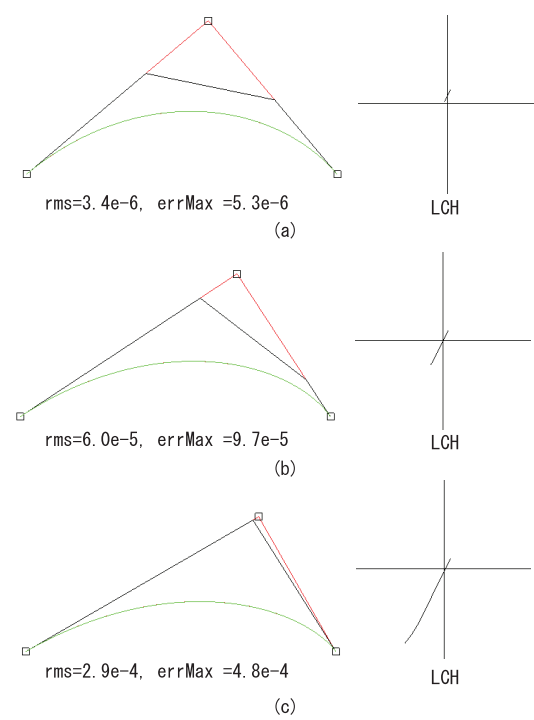


図 7  $\alpha = 2$  の美的曲線の有理 3 次 Bézier 曲線近似